Institut National Polytechnique de Lorraine

Ecole Nationale Supérieure de Géologie

SESSION 1987 — Epreuve de MATHEMATIQUES

L'attention des candidats est attirée sur le fait qu'il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la rédaction de la copie, à la présentation générale du devoir, ainsi qu'aux justifications des calculs effectués.

Préambule. - L'abréviation v.a.r. signifie "variable aléatoire réelle". Si U et U' sont deux v.a.r., E[U], V[U], cov [U,U'] sont respectivement l'espérance, la variance de U, la covariance de U et U'. P(A) est la probabilité de l'événement A. Z est l'ensemble des entiers relatifs, N celui des entiers naturels, N* celui des entiers naturels non nuls. On peut, en le disant clairement, utiliser un résultat non démontré.

On considère une infinité de v.a.r. notées ε_n ($n \in Z$), de même loi, de distribution uniforme sur [-a, +a], (a positif donné). On suppose que sont indépendantes toutes les variables ε_n de tout sous-ensemble fini de ces variables.

- I -

I.1°. - Calculer $E[\varepsilon_n]$ et $V[\varepsilon_n]$. Déterminer a pour que $V[\varepsilon_n] = 1$. On adopte cette valeur de a dans toute la suite.

I.2°. - Soit p un réel fixe donné, vérifiant $-1 < p < +1$. Un entier n étant fixé, ($n \in Z$), montrer que, pour toutes les valeurs prises par les v.a.r. ε_{n-k} ($k \in N$), la série $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k \varepsilon_{n-k}$ est absolument convergente. Sa somme X_n, qui est une fonction des v.a.r. ε_m ($m \in Z$) ($m \leq n$), est elle-même une v.a.r., dont on ne cherchera ni la fonction de répartition, ni la densité.

Expliquer brièvement pourquoi, pour $n \neq n'$, X_n et $X_{n'}$ sont de même loi. Par ailleurs, on pourra admettre que X_n et ε_{n+h} ($h \in N^*$) sont indépendantes.

- II -

II.1°. - Etablir $X_n = pX_{n-1} + \varepsilon_n$. En déduire l'espérance des v.a.r. X_n. Exprimer leur variance en fonction de p seulement.

II.2°. - Calculer cov $[X_n, X_{n-1}]$. Pour $k \in N^*$, calculer cov $[X_n, X_{n-k}]$ en fonction de cov $[X_{n-1}, X_{n-k}]$ et de p, puis exprimer cov $[X_n, X_{n-k}]$ en fonction de p et de k. Pour $i \neq j$, exprimer cov $[X_i, X_j]$ et le coefficient de corrélation de X_i et X_j en fonction de p et de $|i-j|$. X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

II.3°. - a) Montrer que, si U et U' sont des v.a.r. indépendantes, alors, pour $q \in N^*$, U^q et U' le sont aussi.

b) Pour i et j éléments de N^* et distincts, que peut-on dire des espérances des produits $X_k^3 \varepsilon_{k+i}$ et $X_k^2 \varepsilon_{k+i} \varepsilon_{k+j}$?

II.4°. - Etablir, pour $h \in N^*$, la formule : $X_{k+h} = p^h X_k + \sum_{i=1}^{h} p^{h-i} \varepsilon_{k+i}$. Montrer que l'espérance du produit $X_k^2 X_{k+h}^2$ peut s'exprimer uniquement en fonction de p et de $E[X_k^4]$. En déduire que cov $[X_k^2, X_{k+h}^2] = M p^{2h}$ où $M = V[X_k^2]$. On ne demande ni le calcul de $E[X_k^4]$, ni celui de M.

- III -

Dans cette partie, n est entier supérieur ou égal à 2.

III.1°. - a) Calculer la variance de $S_2 = X_1^2 + X_2^2$ en fonction de M et p.

b) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

Montrer que $V[S_n] < nM(1+p^2)/(1-p^2)$.

c) On pose $U_n = S_n/n$. Calculer $L = E[U_n]$ et donner un majorant de $V[U_n]$. Montrer que, quelque soit λ strictement

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE de GEOLOGIE de NANCY

page 257
1987

positif et fixe

$$\lim_{n\to+\infty} P(|U_n - L| > \lambda) = 0$$

III.2°. - a) On pose $R_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \varepsilon_{k+1}$. Calculer $E[R_n]$.

b) h et k étant deux entiers vérifiant $1 \leqslant h < k \leqslant n$, calculer l'espérance du produit $X_k \varepsilon_{k+1} X_h \varepsilon_{h+1}$. (On pourra exprimer X_k en fonction de X_h et de variables ε_i en utilisant la formule du II.4° convenablement modifiée).

c) Calculer $V[R_n]$ en fonction de n et p.

d) On pose $T_n = R_n / n$. Calculer $E[T_n]$ et $V[T_n]$.

Montrer que, quelque soit μ strictement positif et fixe, $\lim_{n\to+\infty} P(|T_n| > \mu) = 0$.

III.3°. - λ et α étant strictement positifs et fixes, avec $\lambda < L$ (cf III.1°.c), on considère les événements suivants :

$$A = \left(\left|\frac{T_n}{U_n}\right| > \alpha\right),\ B = (|U_n - L| > \lambda),\ C = \left(\frac{|T_n|}{L-\lambda} > \alpha\right),\ \bar{B} = (|U_n - L| \leqslant \lambda)$$

a) Montrer que $(A \cap \bar{B}) \Longrightarrow C$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} P(A \cap \bar{B}) = 0$$

b) Montrer que $A \Longrightarrow (A \cap \bar{B}) \cup B$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} P(A) = 0$$

c) On pose $p_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k X_{k+1}}{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}$

Montrer que $p_n - p = T_n/U_n$. En déduire que p_n tend, en probabilité, vers p.

On suppose qu'on a observé les valeurs prises par $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$ donné).

On se propose d'en déduire une prévision de X_{n+1} par une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ des X_i, les a_i étant des réels à déterminer.

On pose $H_n = E[(X_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i X_i)^2]$

IV.1°. - Calculer la dérivée partielle $\partial H_n/\partial a_j$ de H_n par rapport à a_j et l'exprimer en fonction de p seulement, sans user de valeurs absolues.

IV.2°. - On admet que la meilleure prévision est obtenue lorsque H_n est minimum, et que ce résultat est réalisé lorsque toutes les dérivées partielles $\partial H_n/\partial a_j$ ($j = 1, 2, \ldots n$) sont nulles. On a donc pour déterminer les a_i un système de n équations. On appellera L_j l'équation déduite, après simplification par $2/(1-p^2)$, de $\partial H_n/\partial a_j = 0$. On conseille de former la combinaison $pL_2 - L_1$ et d'en déduire a_1. Les a_i étant déterminés, quel est le minimum de H_n ?

IV.3°. - Dans le cas où p est inconnu, les autres hypothèses étant conservées, peut-on en utilisant le résultat de III, donner une estimation de X_{n+1} ?

IV.4°. - Application numérique. Donner une estimation de p et de X_{21} à partir des observations des X_i ($1 \leqslant i \leqslant 20$) rassemblées dans le tableau ci-dessous :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	2,21	1,01	0,77	-0,97	-0,55	0,83	0,86	-0,42	0,85	-0,31

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X_i	0,80	0,93	0,49	-0,44	-0,59	0,18	0,64	-0,23	-0,88	0,03

*****
***
*

page 258 1987 ECOLE NATIONALE SUPERIEURE de GEOLOGIE de NANCY